

UNA FAMILIA DE ELEMENTOS SIMPLES CONFORMES CLASE C^1 .

J. TORRES RUIZ, A. SAMARTIN QUIROGA

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y
PUERTOS DE SANTANDER

1. INTRODUCCION

Dentro del Método de los Elementos Finitos existen dos técnicas fundamentales de obtención de una mayor aproximación de los resultados:

- 1) Un mayor refinamiento de la malla.
- 2) Un aumento del orden de las funciones de interpolación.

En ambos casos es preciso que la serie de funciones coordenadas formen un sistema completo e impongan convergencia en el sentido de Ritz.

Las condiciones necesarias para efectuar la integración de la funcional implican unos requisitos de continuidad de las funciones de aproximación en el elemento con sus adyacentes. Según se cumplan o no esas condiciones se tienen dos tipos de elementos: conformes (o compatibles) y no conformes (o incompatibles).

Existe la conveniencia de no imponer continuidad superior a la necesaria en el problema que se está tratando, es decir, - utilizar las variables básicas estrictas. Estos elementos se denominan simples frente a los hiper-elementos.

Es difícil conseguir funciones de interpolación de elementos simples conformes cuando se trata de problemas de orden de continuidad superior a C^* . Por este motivo se han utilizado a veces con gran eficacia computacional elementos simples no conformes. Sin embargo la convergencia de este tipo de elementos es no monótona y puede ser dependiente del tipo de malla utilizada.

NOTA(*): Evidentemente nos referimos a problemas bidimensionales. En los problemas unidimensionales no existe tal complejidad.

Para la obtención de elementos conformes se han utilizado tres técnicas:

- 1- Mediante adición de funciones racionales.
- 2- Hiperelementos.
- 3- Funciones a trozos.

Las funciones racionales tienen dificultades de integración y los Hiperelementos presentan problemas de excesiva continuidad dando a su vez muy buenos resultados (3). Hay técnicas - que evitan esos problemas.

En el presente estudio se va a considerar la tercera posibilidad, es decir, las funciones a trozos:

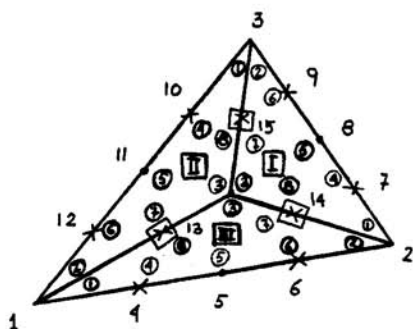
El utilizar funciones a trozos para resolver este problema fue iniciado por Clough y Felippa (4) con muy buenos resultados, y se hizo una extensión del triángulo tratado a elementos cuadrangulares.

Este tipo de enfoque tiene las siguientes ventajas además de las debidas a la conformidad:

- Mejor integración numérica que las funciones racionales.
- La imposición de derivadas cruzadas en los lados no implica condiciones adicionales, ya que deben ser continuas físicamente hablando.
- Son elementos simples de fácil extensión a láminas.
- No influye el cambio de material o geometría de un elemento a otro.
- Fácil imposición de condiciones de contorno en los vértices.
- No se añaden términos de grado superior al grado del mayor polinomio completo, pues se ha comprobado que empeora la convergencia.
- Se pueden crear familias jerárquicas de elementos de este tipo que den una mejor transición entre elementos y permitan el uso de funciones de interpolación de mayor grado que dan mejores resultados a igualdad de gdl.

2. PLANTEAMIENTO ANALITICO

Pensando en la extensión de este tipo de formulación y - utilizando la idea de Clough y Felippa se planteó el elemento - triangular de la figura 1.



x 1 gdl w_n

2 gdl w, w_n

3 gdl w, w_x, w_y

6 gdl $w, w_x, w_y,$

w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}

I subtriángulo I

① vértice 1 en un subtriángulo

1 vértice 1 en el triángulo total

Figura 1

Como expresión de la función de interpolación se consideró un polinomio quintico en cada subtriángulo del tipo:

$$\begin{aligned}
 P = & \alpha_{500} L_1^5 + \alpha_{050} L_2^5 + \alpha_{005} L_3^5 + \alpha_{410} L_1^4 L_2 + \alpha_{041} L_2^4 L_3 + \\
 & + \alpha_{104} L_1 L_3^4 + \alpha_{014} L_2 L_3^4 + \alpha_{401} L_1^4 L_3 + \alpha_{140} L_1 L_2^4 + \\
 & + \alpha_{320} L_1^3 L_2^2 + \alpha_{032} L_2^3 L_3^2 + \alpha_{203} L_1^2 L_3^3 + \\
 & + \alpha_{302} L_1^3 L_3^2 + \alpha_{230} L_1^2 L_2^3 + \alpha_{311} L_1^3 L_2 L_3 + \alpha_{131} L_1 L_2^2 L_3 + \\
 & + \alpha_{113} L_1 L_2 L_3^3 + \alpha_{221} L_1^2 L_2^2 L_3 + \alpha_{122} L_1 L_2^2 L_3^2 + \alpha_{212} L_1^2 L_2 L_3^2
 \end{aligned}$$

La formulación que da los α_{ijk} en función de los gdl del subtriángulo es sencilla, pero al tratar de imponer la continuidad C^1 entre los distintos subtriángulos, la resolución analítica se complicaba. Por esta razón se pensó en un proceso numérico completo para cualquier grado de polinomio.

3. PLANTEAMIENTO NUMÉRICO

En una primera instancia se planteó el elemento genérico de la figura 2, en este caso para grado del polinomio $N=5$.

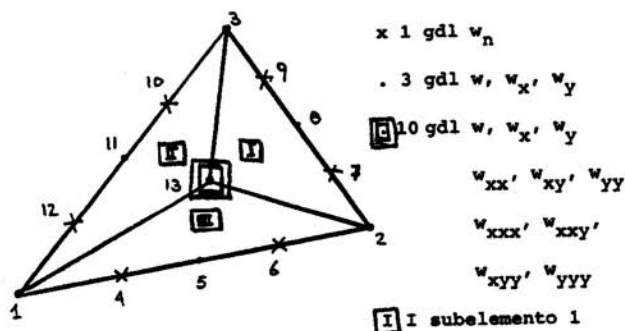


Figura 2

Como se ve tampoco hay continuidad C^1 entre los subelementos pero se ha dado un paso de concentrar en 13 todos los gdl - que luego se eliminarán imponiendo continuidad entre los subelementos.

Siguiendo la idea de Samartín (5) de concentrar los gdl en un nudo con vistas a facilitar la unión de unos elementos con otros y sabiendo que eso no produce empeoramiento en la convergencia, se redujo el elemento ya considerado al que se indica en la figura 3.

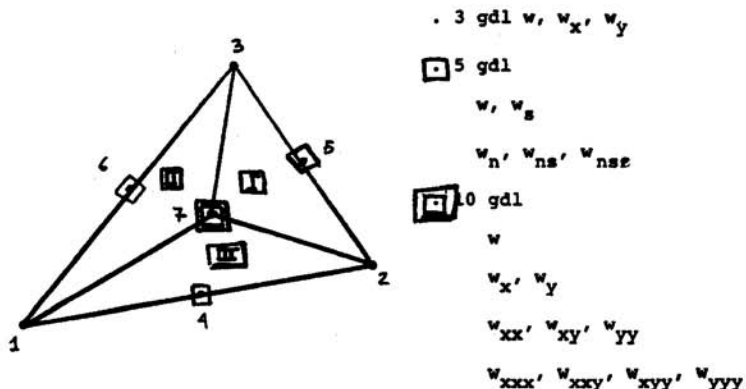


Figura 3

3.2. EXPRESIONES UTILIZADAS

Usando la notación expuesta en la figura 4, las distintas expresiones de la función de interpolación y sus derivadas son:

$$P(L_1, L_2, L_3) = \sum_{\substack{i,j,k=0 \\ i+j+k=N}} a_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k$$

$$s! S(N) = N(N+1)/2$$

$$P_{M,n} = \frac{\partial^M P}{\partial L_1^\alpha \partial L_2^\beta \partial L_3^\gamma} = \frac{S(N+1)}{n!} a_{ijk} \frac{i!}{(i-\alpha)!} \frac{j!}{(j-\beta)!} \frac{k!}{(k-\gamma)!} \cdot L_1^{(i-\alpha)} \cdot L_2^{(j-\beta)} \cdot L_3^{(k-\gamma)}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = M$$

$$\bar{P}_m = \frac{\partial^{j+k} P}{\partial x^j \partial y^k} = \left(\frac{1}{2A}\right)^{j+k} \frac{s(j+1)}{v!} \frac{s(k+1)}{u!} A_{jv} B_{ku} P_{j+k, v+u}$$

$$\text{donde } A_{jv} = \frac{j!}{j_1! j_2! j_3!} b_1^{j_1} b_2^{j_2} b_3^{j_3}$$

$$B_{ku} = \frac{k!}{k_1! k_2! k_3!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3}$$

$$j_1 = i(j, v); \quad j_2 = j(v); \quad j_3 = k(v)$$

$$k_1 = k(k, u); \quad k_2 = j(u); \quad k_3 = k(u)$$

$$\bar{P}_m^i = \frac{\partial^{j+k} P}{\partial x_1^j \partial x_2^k} = \left(\frac{1}{2A}\right)^{j+k} \frac{s(j+1)}{v!} \frac{s(k+1)}{u!} \bar{A}_{jv}^i \bar{B}_{ku}^i P_{j+k, v+u}$$

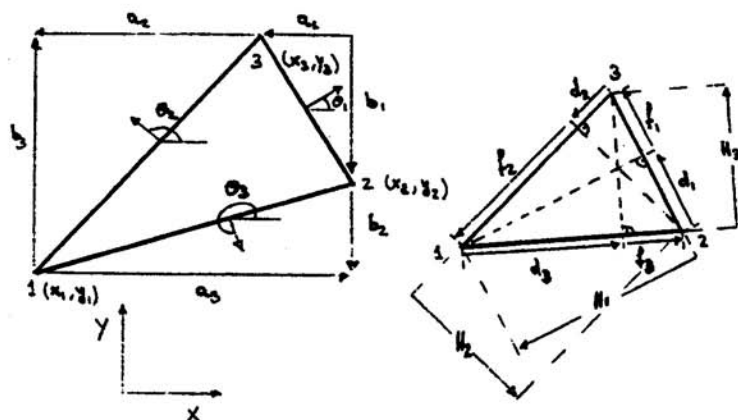
i representa el lado

$$\text{con } \bar{A}_{jv}^i = \frac{j!}{j_1! j_2! j_3!} (a_{i_1})^{j_1} (a_{i_2})^{j_2} (a_{i_3})^{j_3}$$

$$\bar{B}_{ku}^i = \frac{k!}{k_1! k_2! k_3!} (b_{i_1})^{k_1} (b_{i_2})^{k_2} (b_{i_3})^{k_3}$$

$$\text{con } a_{ii} = 0 \quad a_{ij} = -H_i \quad a_{ix} = H_i \quad y \quad 0^0 = 1$$

$$b_{ii} = e_i \quad b_{ij} = f_i \quad b_{ik} = d_i$$



| | | | |
|---|---|---|---|
| i | 1 | 2 | 3 |
| j | 2 | 3 | 1 |
| k | 3 | 1 | 2 |

$$a_i = x_k - x_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$d_i = \frac{a_i a_k + b_i b_k}{e_i}$$

$$e_i = -a_i^2 + b_i^2$$

$$f_i = \frac{a_i a_j + b_i b_j}{e_i}$$

$$H_i = \frac{a_i b_j - b_i a_j}{e_i} = -\frac{a_i b_k - b_i a_k}{e_i}$$

$$2A = a_i b_k - b_i a_k = -(a_i b_j - b_i a_j)$$

Figura 4

3.3. IMPOSICION DE LA CONTINUIDAD C^1

Con estas bases se puede formular en cada elemento para todos los gdl el siguiente sistema

$$P = (L_1^i L_2^j L_3^k) a_{ijk} = \underline{RL} \quad a^{(i)}$$

$$\underline{c}^{(i)} \quad \underline{a}^{(i)} = \underline{d}^{(i)}$$

siendo $\underline{C}^{(i)}$ matriz de coeficiente ctes.

$$\underline{a}^{(i)} = (a_{ijk})^T$$

$$\underline{d}^{(i)} = (d_i)^T$$

$$\underline{a}^{(i)} = \underline{C}^{(i)-1} \underline{d}^{(i)}$$

de donde

$$P = \underline{RL} \quad \underline{C}^{(i)-1} \underline{d}^{(i)}$$

Imponiendo la continuidad C^1 entre subelementos se obtiene:

$$H_{51} \underline{a}^{(1)} + H_{62} \underline{a}^{(2)} = 0$$

$$H_{61} \underline{a}^{(1)} + H_{53} \underline{a}^{(3)} = 0$$

$$H_{52} \underline{a}^{(2)} + H_{53} \underline{a}^{(3)} = 0$$

Poniendo $\underline{a}^{(i)}$ en función de todos los gdl del triángulo completo se tiene

$\underline{a}^{(i)} = (\underline{C}_0^i \quad \underline{C}_i^i) \begin{pmatrix} \underline{d}_0 \\ \underline{d}_i \end{pmatrix}$ siendo \underline{d}_0 los gdl correspondientes al nudo interior.

$$(H_{51} \underline{C}_0^1 + H_{62} \underline{C}_0^2) \underline{d}_0 + (H_{51} \underline{C}_i^1 + H_{62} \underline{C}_i^2) \underline{d} = 0$$

$$(H_{61} \underline{C}_0^1 + H_{53} \underline{C}_0^3) \underline{d}_0 + (H_{61} \underline{C}_i^1 + H_{53} \underline{C}_i^3) \underline{d} = 0$$

$$(H_{52} \underline{C}_0^2 + H_{53} \underline{C}_0^3) \underline{d}_0 + (H_{52} \underline{C}_i^2 + H_{53} \underline{C}_i^3) \underline{d} = 0$$

de donde se obtiene

$$\underline{d}_0 = \tilde{H} \underline{d}$$

y

$$\underline{a}^{(i)} = (\underline{C}_0^i \quad \underline{C}_i^i) \begin{pmatrix} \underline{d}_0 \\ \underline{d} \end{pmatrix} = (\underline{C}_0^i \tilde{H} + \underline{C}_i^i) \underline{d} = \bar{C}^i \underline{d}$$

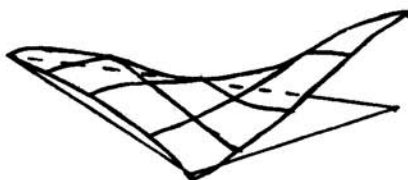
y por lo tanto:

$$P^{(i)} = \underline{RL} \underline{a}^{(i)} = \underline{RL} \bar{C}^i \underline{d} \quad \text{para cada subtriángulo}$$

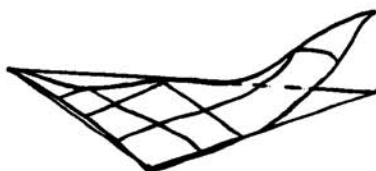
Luego $\underline{N} = \underline{RL} \underline{C}^i$ siendo \underline{N} el vector de las funciones de forma.

Para los grados 5 y 6 se tiene en la figura 5 la función de forma relativa al gdl flecha en un vértice exterior.

El organigrama del programa de computador utilizado se indica en la figura 6.



(a) GRADO 5



(b) GRADO 6

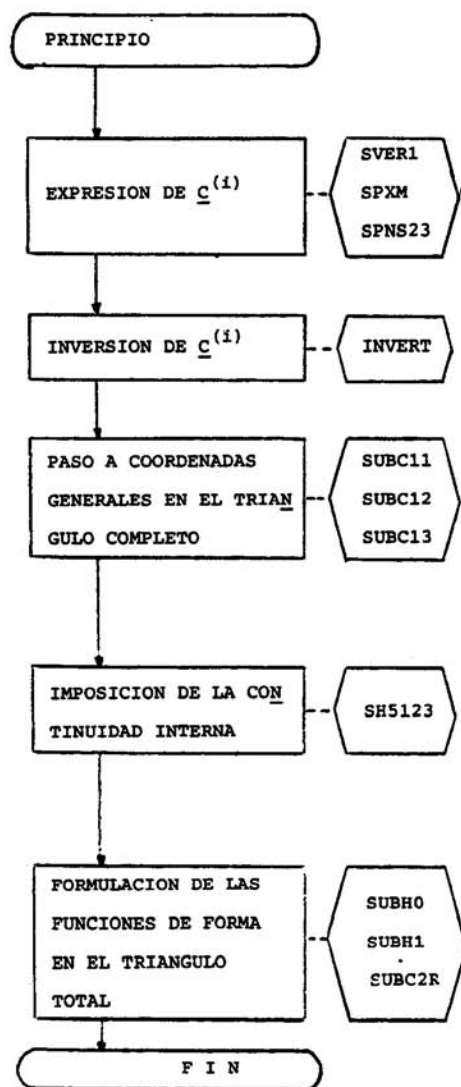


Figura 6

1. B.M. Irons y J.K. Drapper, Inadequacy of nodal connetions in a stiffnes solution for plate bending! J.A.I.A.A.,3,5, 1965.
2. J. Diaz del Valle y A. Samartín Quiroga, ¡Una contribución al estudio de hiperelementos Finitos en flexión de placas! E.T.S.I.C.C.P. Santander 1980.
3. C.A. Fellippa, ¡Refined finite Element Analysis of linear and Nonlinear two-dimensional Structures!
4. R.W. Clough y C.A. Fellippa. ¡A refined quadrilateral element for analysis of plate bending! Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. Airforce. Inst. of Tech., Wright Patterson A.F. Base, Ohio, 1968.
5. A. Samartín Quiroga. "Un estudio sobre la exactitud del método de los elementos finitos. Aplicación a la barra recta de sección variable bajo esfuerzos axiles". Departamento de Análisis de las Estructuras. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Santander (1980).